

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ DATA ASSIMILATION ДЛЯ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА НЕСТАБИЛЬНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДАВЛЕНИЯ

Сафиуллин Н.Т.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, ИРИТ-РТФ
ул. Мира, 32, Екатеринбург, Свердловская обл., 620002, Россия
тел.: +7-902-877-38-61, e-mail: aitsnt@gmail.com

Аннотация — В работе обоснована методика применения технологии Data Assimilation для прогнозирования временного ряда (ВР), содержащего значения чисел Вольфа, на основе новой модели солнечной активности, и ее программная реализация. Данная методика обеспечивает: валидацию модели прогнозируемого ВР; обоснованный выбор и, при необходимости, корректировку начальных условий и параметров модели; выдачу месячного прогноза солнечной активности, согласующегося с наблюдаемыми данными. Описаны преимущества и недостатки выбранной методики, которые будут положены в основу дальнейших разработок в этом направлении.

DATA ASSIMILATION OF SUN ACTIVITY FOR THE MODEL BASED ON NEGATIVE EFFECTIVE MAGNETIC PRESSURE INSTABILITY EFFECT

Safiullin N.T.

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, IRIT-RTF
Mira st., 32, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: +7-902-877-38-61, e-mail: aitsnt@gmail.com

Abstract — In this paper the data assimilation scheme was built and implemented, based on a new model of sun activity with observation vector of Wolf sunspot numbers. This data assimilation allows to validate a new model, to estimate and update initial state and conditions of model, and to correct the monthly sun activity forecasting. Also, this data assimilation technique has its own advantages and disadvantages, thus, giving us a lot of better understanding of a new model for future research.

I. Введение

Число Вольфа R или относительное цюрихское число солнечных пятен является одним из основных количественных показателей солнечной активности. Начало временного ряда (ВР), содержащего значения чисел Вольфа, датируется 1749 г.

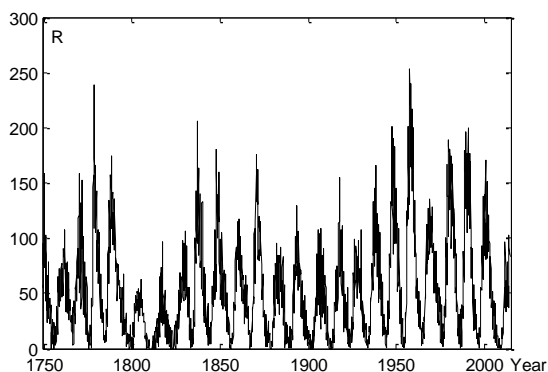


Рис. 1. Числа Вольфа с 1749 г. по март 2015 г.

Fig. 1. Wolf numbers between 1749 and March 2015

Несмотря на продолжительный период наблюдений за солнечной активностью, модели механизма формирования солнечных пятен до сих пор остаются темой активных дискуссий. Для объяснения наблюдаемой динамики солнечных пятен предложены несколько моделей, в том числе:

- 1) модель, в которой возникновения солнечных пятен объясняется неравномерностью магнитного поля в глубине Солнца, приводящего к выходу силовых линий областей с повышенной напряженностью данного поля на поверхность звезды [1].
- 2) модель, в которой вынос на поверхность звезды областей с повышенной плотностью магнитной

энергии (солнечных пятен) обусловлен конвекцией вещества, образующего Солнце [2].

Отметим, что за несоответствие теоретических результатов с наблюдаемыми явлениями, в последние годы обе модели были подвергнуты справедливой критике [3].

Для устранения имеющихся противоречий была предложена новая модель механизма формирования солнечных пятен, основанная на эффекте неустойчивости отрицательного магнитного давления (NEMPI) [4]. Дальнейшая модификация данной модели позволила рассчитывать значения ВР, содержащего модельные значения чисел Вольфа [5]. В общем виде данная модель представляет собой следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = GD \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \theta^2} - \mu^2 B_\phi,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B_\phi + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \mu^2 A, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \chi^c}{\partial t} + (T^{-1} + \kappa_T \mu^2) \chi^c = \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}, \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \chi^c}{\partial \theta} \right)$$

где B_ϕ — полоидальная составляющая напряженности магнитного поля; A — вектор-потенциал магнитного поля, χ^c — магнитная спиральность, D — динамо число, α — нелинейный альфа-эффект, μ — толщина конвективной зоны, Φ — некоторая нелинейная функция, G — радиальный сдвиг вращения, T — время релаксации, κ_T — параметр потока для магнитной спиральности.

В ходе практического использования модели (1) были выявлены следующие проблемы:

- 1) Отсутствие точного описания связи между напряженностью магнитного поля B и числами Вольфа R , что приводит к необходимости привлечения экспериментальных данных,

которые, с неизбежностью, имеют погрешность. (Вопросы, связанные с точностью наблюдаемых чисел Вольфа, обсуждаются, например, в [6]).

- 2) Проблема выбора начальных условий модели (1) и временного интервала, на котором найденное решение соответствует наблюдаемому ряду. Это связано с тем фактом, что время наблюдения солнечной активности оказывается существенно меньше общего времени жизни Солнца.
- 3) Проблема валидации модели на основе сопоставления полученных результатов с имеющимися представлениями о солнечной активности, возникающая вследствие нелинейности модели, большого числа параметров и высокой размерности задачи.

В этой связи была выдвинута гипотеза о возможности решения данных проблем за счет привлечения математических методов вычислительной технологии *Data Assimilation*, позволяющих установить соответствие между многомерным пространством решений модели и одномерным вектором имеющихся для этой системы наблюдений с учетом наличия ошибок.

II. Основная часть

Напомним, что в *Data Assimilation* исходная стохастическая система описывается следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = M(x_k) + w_k, \\ y_k = H(x_k) + v_k \end{cases} \quad (2)$$

где x_k – известное состояние модели в момент времени t_k ; x_{k+1} – состояние модели в следующий момент времени; M – оператор или функция перехода, определяющая эволюцию системы со временем; w_k – шум, присутствующий внутри модели; y_k – вектор наблюдений системы; H – оператор наблюдений, связывающий многомерное состояние системы с одномерным вектором наблюдений; v_k – ошибка наблюдений. В (2) предполагается, что w_k , v_k – независимые случайные величины.

Первое уравнение в (2) называется уравнением прогноза, а второе – уравнением наблюдений. Соответственно, алгоритм *Data Assimilation* реализуется в два этапа: этап анализа и этап прогноза.

На этапе анализа на основе имеющегося состояния системы x_k^f строится скорректированное состояние x_k^a , опирающееся на значение наблюдений y_k для момента времени t_k :

$$x_k^a = x_k^f + K(y_k - H(x_k^f)), \quad (3)$$

где K – коэффициент передачи, $e = y_k - H(x_k^f)$ – расчетная ошибка между известными наблюдениями и наблюдениями, полученными в соответствие с (1).

В рассматриваемом случае задача анализа состоит в минимизации данной ошибки e . В зависимости от выбранного критерия, по которому минимизируется данная ошибка, различают методики *Data Assimilation*.

На этапе прогноза строится состояние системы в следующий момент времени t_{k+1} , с учетом всех ошибок в исходной системе (2) и с учетом тех корректировок, что были внесены на шаге анализа (3):

$$x_{k+1}^f = M(x_k^a). \quad (4)$$

Отметим, как правило, полагают, что (2) является линейной системой, т.е. $M(x_k) = M \cdot x_k$ и $H(x_k) = H \cdot x_k$, а также w_k и v_k – случайные выборки из генеральных совокупностей нормального белого шума с заранее известными значениями ковариационной матрицы ошибок Q_k и R_k соответственно. В этом случае коэффициент передачи K рассчитывается по формуле:

$$K_k^* = P_k^f H_k^T (H_k P_k^f H_k^T + R_k)^{-1} \quad (5)$$

где $P_k^f = M_k (I - K_{k-1}^* H_{k-1}) P_{k-1}^f M_k^T + Q_k$ – ковариационная матрица ошибок прогноза.

Коэффициент передачи K^* часто называют коэффициентом передачи Калмана (Kalman gain), а семейство методик *Data Assimilation* называют, соответственно, некоторым фильтром Калмана.

Однако в рассматриваемом случае модель (1) оказывается нелинейной, поэтому операторы M и H невозможно описать в виде матриц, а характеристики имеющихся в системе (2) шумов заранее неизвестны. В этой связи была использована методика *Stochastic Ensemble Kalman Filter (SEnKF)* [8], которая реализуется следующей последовательностью действий [7]:

Для каждого момента времени t_k .

- 1) Для фиксированной точки y_k наблюдения создается ансамбль наблюдений:

$$y_i = y_k + u_i, \quad \sum_i u_i = 0, \quad (6)$$

при этом ковариационная матрица ошибок

$$\text{оценивается как } R_k = \frac{1}{m-1} \sum_i u_i u_i^T.$$

- 2) В соответствие с (5) рассчитывается коэффициент передачи, где произведения матриц заменяются их статистическими оценками:

$$\begin{aligned} P_k^f H_k^T &= \frac{1}{m-1} \sum_i (x_i^f - \bar{x}^f) \left[H(x_i^f) - \bar{y}^f \right]^T \\ H_k P_k^f H_k^T &= \frac{1}{m-1} \sum_i \left(H(x_i^f) - \bar{y}^f \right) \left[H(x_i^f) - \bar{y}^f \right]^T \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{y}^f = \frac{1}{m} \sum_i H(x_i^f)$.

- 3) В соответствие с (3) строится ансамбль скорректированных состояний x_k^a .
- 4) В соответствие с (4) по скорректированным значениям вычисляются прогнозируемые значения x_i^f и далее средний прогноз

$$\bar{x}^f = \frac{1}{m} \sum_i x_i^f.$$

- 5) Рассчитывается ковариационная матрица ошибок прогноза для следующего шага

$$P^f = \frac{1}{m-1} \sum_i (x_i^f - \bar{x}^f) (x_i^f - \bar{x}^f)^T. \quad (8)$$

Данный алгоритм был реализован в пакете MATLAB. Здесь в качестве оператора M выступала исходная система уравнений модели (1), а в качестве оператора H использовалась оценка значений чисел Вольфа в соответствие с методикой, описанной в [5]:

$$W = 2\pi R_s^2 \int \tau_s(B) I(t, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (9)$$

где функция $I(t, \theta) = \frac{\gamma_{inst} |B - B_{cr}|}{\Phi_s} \Theta(B - B_{cr}) \Theta(\gamma_{inst})$,

B_{cr} – критическое значение магнитного поля, при превышении значения которого начинается формирование солнечных пятен, γ_{inst} – коэффициент неустойчивости, R_\odot – радиус Солнца, τ_s – время

затухания генерации, Θ – функция $\begin{cases} \Theta(x) = 1, x > 0; \\ \Theta(x) = 0, x \leq 0. \end{cases}$

В качестве вектора наблюдений y_k были использованы известные значения среднемесячных чисел Вольфа, размещенные на сайте королевской Бельгийской обсерватории [10].

III. Результаты применения SEnKF

Рассмотрим результаты, полученные в результате применения методики SEnKF к модели NEMPI для произвольного выбранного цикла из BP чисел Вольфа, представленные на рис. 2. Здесь были использованы следующие значения параметров, входящие в (1) и оператор M : $D = -8450$, $\sigma = 3$, $\mu = 3$, $\kappa_T = 0.1$, $T = 6.3$, $G = 1$, начальные значения СДУ вида $B(0, \theta) = 0.051 \cdot \sin(\theta) + 0.95 \cdot \sin(2\theta)$, которые были определены экспериментально на основе результатов численных расчетов. Для формирования ансамбля наблюдений, используемых в (6), к временному ряду (1) добавлялся белый шум.

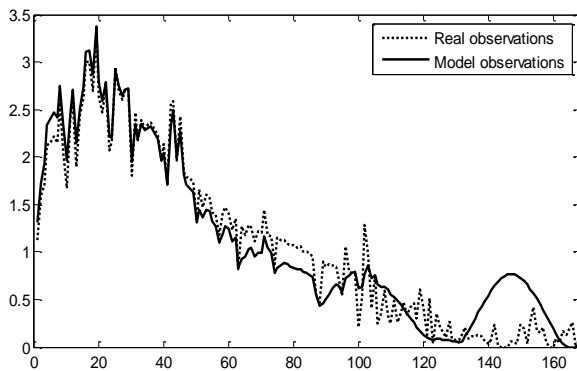


Рис. 2. Data Assimilation для цикла № 5

Fig. 2. Data Assimilation for cycle 5

Относительная величина ошибки между исходными наблюдениями и результатами коррекции расчетного ряда в соответствие с методикой SEnKF представлена на рис. 3.

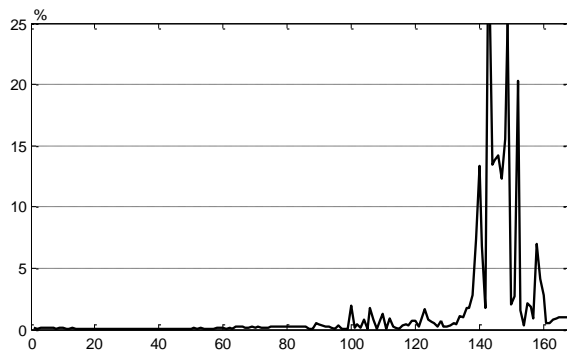


Рис. 3. Относительная величина ошибки между числами Вольфа и модельными значениями

Fig. 3. Relative error between Wolf numbers and simulated numbers

Из рисунков 2 и 3 видно, что результаты применения методики SEnKF метода Data Assimilation, действительно, на временном интервале длиной 130 месяцев позволяют получить удовлетворительные значения среднемесячных значений чисел Вольфа. При этом при использовании методики SEnKF удается не только получить форму цикла, близкую к форме наблюдаемого цикла, но и учесть особенности наблюдаемого цикла, обусловленные шумом (скачкообразное изменение чисел Вольфа). Неудовлетворительным по точности оказался участок на отрезке между 130 и 160 временными отсчетами, на котором значения наблюдаемых чисел Вольфа близки или равны нулю.

Анализ работы алгоритма и модели показал, что на подобном отрезке метод SEnKF не справляется с коррекцией состояния системы по наблюдениям. В этой связи было высказано предположение о том, что при генерации ансамбля наблюдений в соответствие с (6) не учитывалось, что наблюдаемые величины отвечают условию $y_i \geq 0$.

Однако оказалось, что даже при учете данного ограничения результаты существенно не улучшились на данном временном интервале. С нашей точки зрения, данный результат обусловлен тем, что из-за функции отсечки магнитного поля $\Theta(B - B_{cr})$ в (9) ограничиваются возможности корректировки полученных наблюдений с помощью фильтра Калмана.

Также были обнаружены несколько циклов BP чисел Вольфа, для которых результаты, полученные с помощью методики SEnKF, вообще оказались неудовлетворительными (рис. 4).

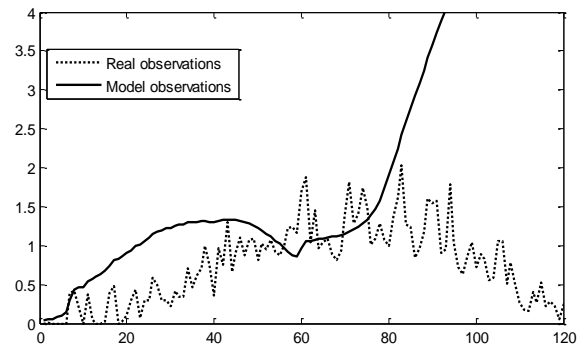


Рис. 4. Data Assimilation для цикла № 8

Fig. 4. Data Assimilation for cycle 8

Решить данную проблему удалось только внесением изменений в исходную модель (1), в которой постоянная α -эффекта была заменена ассиметричной функцией угла θ (ассиметричный α -эффект). Семейство функций $\alpha(\theta)$, в диапазоне от абсолютно положительного до абсолютно отрицательного эффекта, представлено на рис. 5.

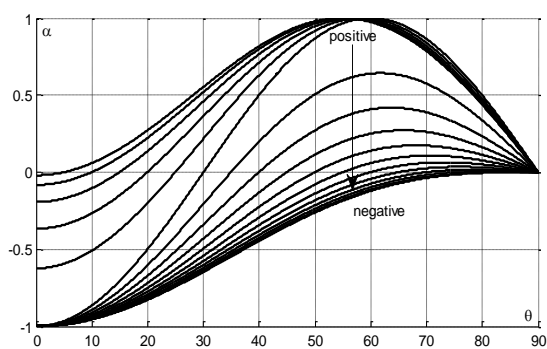


Рис. 5. Семейство кривых для переменного α -эффекта

Fig. 5. Set of functions for variable α -effect

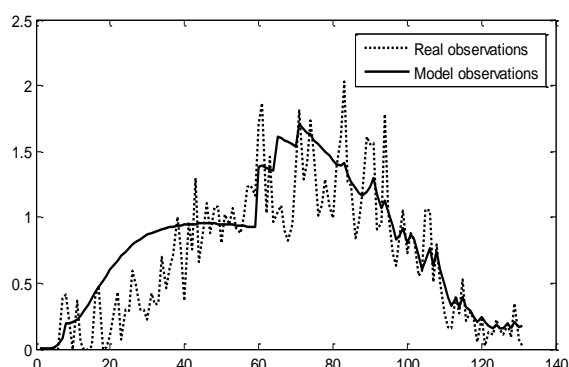


Рис. 6. Data Assimilation для цикла № 8, усовершенствованная версия

Fig. 6. Data Assimilation for cycle 8, modified version

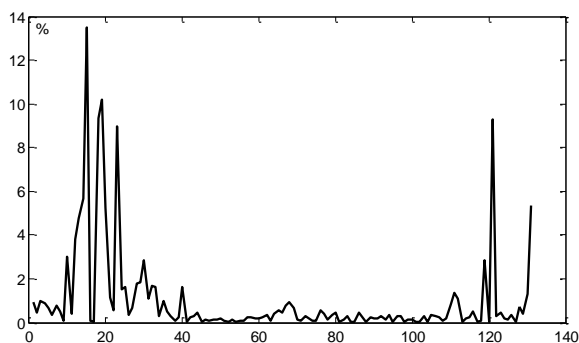


Рис. 7. Относительная величина ошибки между числами Вольфа и модельными значениями

Fig. 7. Relative error between Wolf numbers and simulated numbers

Дальнейшие эксперименты по применению методики Data Assimilation на основе SEnKF показали, что переход от аддитивной коррекции начальных условий системы к мультипликативной обеспечивает существенное повышение точности получаемых результатов. Это позволило предположить, что следует изменить и сам метод Data Assimilation, перейдя от методики SEnKF к более сложным мультипликативным подходам [9].

Данное предположение оказалось правильным, что подтверждают результаты, представленные на рис. 6, 7 из которых видно, что при использовании в методе Data Assimilation мультипликативного подхода относительная ошибка расчетных значений чисел Вольфа не превосходит 14%.

IV. Заключение

В ходе проведенных исследований возможности комплексного использования модели солнечной активности, основанной на эффекте неустойчивости отрицательного магнитного давления (1) и метода Data Assimilation, получены следующие практические важные результаты:

1. На основе сравнения наблюдаемых чисел Вольфа и расчетных значений магнитного поля B , найденных при решении СДУ (1), получено подтверждение адекватности модели NEMPI.
2. Удалось на основе адаптивной корректировки начальных условий и параметров модели (1) определить их значения, при которых отклонение между наблюдениями и расчетными значениями оказываются минимальными.
3. Показано, метод Data Assimilation при использовании SEnKF позволяет строить и корректировать прогноз по среднемесячным числам Вольфа на временных интервалах длительностью один месяц.

Направлением дальнейших исследований являются: разработка подходов, обеспечивающих увеличение длительности времени прогноза при использовании модели солнечной активности (1); увеличение точности метода Data Assimilation за счет использования более сложных с вычислительной точки зрения подходов в сравнении с методикой SEnKF; исследование 2-х и 3-х мерных обобщений модели (1), а также валидация модели (1) не только на одномерном ряде чисел Вольфа, но и с использованием информации о распределении солнечных пятен по поверхности Солнца (так называемых «бабочек Маундера»).

V. Литература

- [1] Choudhuri A. R., Chatterjee P., Jiang J. Predicting Solar Cycle 24 with a solar dynamo model. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 98, 131103.
- [2] Kitiashvili I. N., Kosovichev A. G., Wray A. A., Mansour N. N. Mechanism of Spontaneous Formation of Stable Magnetic Structures on the Sun. *The Astrophysical Journal*, 2010, vol. 719, pp. 307-312.
- [3] Featherstone N., Miesch M. Meridional circulation in solar and stellar convection zones. *The Astrophysical Journal*, 2015, vol. 804, 21 p.
- [4] Rogachevskii I., Kleeorin N.. Magnetohydrodynamic turbulence in the solar convective zone as a source of oscillations and sunspots formation. *Astron. Astrophys.*, 1996, vol. 307, pp. 293-309.
- [5] Y. Kleeorin, N. Safiullin, N. Kleeorin, S. Porshnev, I. Rogachevskii, D. Sokoloff. The dynamics of Wolf numbers based on nonlinear dynamos with magnetic helicity: comparisons with observations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2016, arXiv: 1512.04363 [astro-ph.SR], 9 p.
- [6] Frederic C., et al. Revisiting the Sunspot Number. *Space Sci. Rev.*, 2014, vol. 186, pp. 35-103.
- [7] Marc Bocquet. Introduction to the principles and methods of data assimilation in geosciences. *Publ. by Ecole des Ponts ParisTech*, 2015, 88 p.
- [8] G. Evensen. The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 2003, vol. 53, pp. 343-367.
- [9] Steven J. Fletcher and Andrew S. Jones. Multiplicative and Additive Incremental Variational Data Assimilation for Mixed Lognormal-Gaussian Errors. *American Meteorological Society*, 2014, vol. 142, pp. 2521-2544.
- [10] Solar Influence Data Analysis Center <http://sidc.oma.be>